

# Méth. Mat. Phys. - Chapitre 9

## Théorie de Sturm-Liouville



- 9.1 Opérateur hermitien et fonction poids
- 9.2 Formule de Rodrigues et fonction génératrice
- 9.3 Fonctions propres et base orthonormée
- 9.4 Décomposition spectrale et fonction de Green
- 9.5 Ondes stationnaires sur une corde vibrante
- 9.6 Corde vibrante entretenue

- **Equation différentielle ordinaire homogène 2<sup>e</sup> ordre** : où  $\lambda_n \in \mathbb{R}$

$$p_2(x) y_n''(x) + p_1(x) y_n'(x) + (p_0(x) - \lambda_n) y_n(x) = 0 \quad (9.1)$$

- **Opérateur linéaire** :

$$\mathcal{L} = p_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_0(x) \quad (9.2)$$

- **Equation aux valeurs propres** : fonctions propres  $y_n(x)$

$$\mathcal{L} y_n(x) = \lambda_n y_n(x) \quad (9.3)$$

- **Linéarité des solutions** : fonctions propres non normées

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left( \alpha_1 y_m(x) + \alpha_2 y_n(x) \right) &= \alpha_1 \mathcal{L} y_m(x) + \alpha_2 \mathcal{L} y_n(x) \\ &= \alpha_1 \lambda_m y_m(x) + \alpha_2 \lambda_n y_n(x) \end{aligned} \quad (9.4)$$

- **Orthonormalité** : mesure  $w(x) dx$  où  $w(x) \in \mathbb{R}_+$  fonction poids

$$\langle y_m | y_n \rangle = \int_a^b y_m^*(x) y_n(x) w(x) dx = \delta_{nm} \quad (9.5)$$

- **Produits scalaires** : fonctions  $y_m(x)$  et  $y_n(x) \in \mathcal{H}$  (9.6)

$$\langle y_m | \mathcal{L} y_n \rangle = \int_a^b y_m^*(x) \left( p_2(x) y_n''(x) + p_1(x) y_n'(x) + p_0(x) y_n(x) \right) w(x) dx$$

$$\langle \mathcal{L} y_m | y_n \rangle = \int_a^b \left( p_2(x) y_m^{*''}(x) + p_1(x) y_m^{*'}(x) + p_0(x) y_m^*(x) \right) y_n(x) w(x) dx$$

- **Différence entre les produits scalaires** : intégration par parties

$$\begin{aligned} \langle y_m | \mathcal{L} y_n \rangle - \langle \mathcal{L} y_m | y_n \rangle &= \int_a^b (y_m^* p_2 w y_n'' - y_n p_2 w y_m^{*''}) dx \\ &+ \int_a^b (y_m^* p_1 w y_n' - y_n p_1 w y_m^{*'}) dx + \int_a^b (y_m^* p_0 w y_n - y_n p_0 w y_m^*) dx \\ &= (y_m^* p_2 w y_n' - y_n p_2 w y_m^{*'}) \Big|_a^b - \int_a^b \left( (y_m^* p_2 w)' y_n' - (y_n p_2 w)' y_m^{*'} \right) dx \\ &+ \int_a^b (y_m^* p_1 w y_n' - y_n p_1 w y_m^{*'}) dx \end{aligned} \quad (9.7)$$

- **Identité** : intégration par parties

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b \left( (y_m^* p_2 w)' y_n' - (y_n p_2 w)' y_m^{*'} \right) dx \\
 &= \int_a^b \left( y_m^* (p_2 w)' y_n' - y_n (p_2 w)' y_m^{*'} \right) dx + \int_a^b \left( y_m^{*'} p_2 w y_n' - y_n' p_2 w y_m^{*'} \right) dx \\
 &= (p_2 w)' \int_a^b (y_m^* y_n' - y_n y_m^{*'}) dx \tag{9.8}
 \end{aligned}$$

- **Différence entre les produits scalaires** : intégration par parties (9.8)

$$\begin{aligned}
 \langle y_m | \mathcal{L} y_n \rangle - \langle \mathcal{L} y_m | y_n \rangle &= (p_2 w) (y_m^* y_n' - y_n y_m^{*'}) \Big|_a^b \tag{9.9} \\
 &+ \int_a^b y_m^* (p_1 w - (p_2 w)') y_n' dx - \int_a^b y_n (p_1 w - (p_2 w)') y_m^{*'} dx
 \end{aligned}$$

- **Conditions aux bords** : intervalle  $[a, b]$

$$p_2(a) w(a) = p_2(b) w(b) = 0 \tag{9.10}$$

- **Equations différentielles** : conditions aux bords (9.10)

2 <sup>e</sup> ordre ordinaires	$p_2(x)$	$w(x)$	$p_2(x)w(x)$	$[a, b]$
Hermite	1	$e^{-x^2}$	$e^{-x^2}$	$[-\infty, \infty]$
Laguerre	$x$	$e^{-x^2}$	$x e^{-x^2}$	$[0, \infty]$
Laguerre généralisés	$x$	$x^k e^{-x^2}$	$x^{k+1} e^{-x^2}$	$[0, \infty]$
Legendre	$1 - x^2$	1	$1 - x^2$	$[-1, 1]$
Legendre généralisés	$1 - x^2$	1	$1 - x^2$	$[-1, 1]$

- **Terme de bord** :

$$p_2 w (y_m^* y_n' - y_n y_m^{*'}) \Big|_a^b = 0 \quad (9.11)$$

- **Différence entre les produits scalaires** : (9.11) donne (9.12)

$$\langle y_m | \mathcal{L} y_n \rangle - \langle \mathcal{L} y_m | y_n \rangle = \left( p_1 w - (p_2 w)' \right) \int_a^b (y_m^* y_n' - y_n y_m^{*'}) dx$$

- **Opérateur hermitien** : auto-adjoint :  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$

$$\langle y_m | \mathcal{L} y_n \rangle = \langle \mathcal{L}^\dagger y_m | y_n \rangle = \langle \mathcal{L} y_m | y_n \rangle \quad (9.13)$$

- **Condition d'hermiticité** : (9.13) dans (9.12) : choix de  $w(x)$

$$\left( p_2(x) w(x) \right)' = p_1(x) w(x) \quad (9.14)$$

- **Opérateur hermitien** : valeurs propres réelles :  $\lambda_n = \lambda_n^*$

$$\begin{aligned} \langle y_n | \mathcal{L} y_n \rangle - \langle \mathcal{L} y_n | y_n \rangle &= (\lambda_n - \lambda_n^*) \int_a^b y_n^*(x) y_n(x) w(x) dx \quad (9.15) \\ &= (\lambda_n - \lambda_n^*) \langle y_n | y_n \rangle = \lambda_n - \lambda_n^* = 0 \end{aligned}$$

- **Fonction de poids** :

$$w(x) = \frac{1}{p_2(x)} \exp \left( \int^x \frac{p_1(x')}{p_2(x')} dx' \right) \quad (9.16)$$

- **Démonstration :**

$$\left( p_2(x) w(x) \right)' = \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \exp \left( \int^x \frac{p_1(x')}{p_2(x')} dx' \right) = p_1(x) w(x) \quad (9.17)$$

- **Equation différentielle ordinaire :** (9.1) multipliée par  $w(x)$  : (9.18)

$$p_2(x) w(x) y_n''(x) + p_1(x) w(x) y_n'(x) + (p_0(x) - \lambda_n) w(x) y_n(x) = 0$$

- **Condition d'hermiticité :** (9.14) dans (9.18) : (9.19)

$$p_2(x) w(x) y_n''(x) + \left( p_2(x) w(x) \right)' y_n'(x) + (p_0(x) - \lambda_n) w(x) y_n(x) = 0$$

- **Equation différentielle de Sturm-Liouville :** (9.19)

$$\frac{d}{dx} \left( w(x) p_2(x) y_n'(x) \right) + (p_0(x) - \lambda_n) w(x) y_n(x) = 0 \quad (9.20)$$

- **Solutions polynomiales :** degré  $n$  : conditions (notes)

- 1  $p_2(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$

- 2  $p_1(x) = \beta_1 x + \beta_0$

- 3  $p_0(x) = 0$

- **Formule de Rodrigues** : solutions polynomiales (notes : démonstration)

$$y_n(x) = \frac{c_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left( w(x) p_2^n(x) \right) \quad (9.28)$$

- **Fonction génératrice** : des solutions de l'équation différentielle

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x) t^n \quad (9.47)$$

- **Dérivée de la fonction génératrice** : en  $t = 0$  ainsi  $k = n$

$$\left. \frac{\partial^n g(x, t)}{\partial t^n} \right|_{t=0} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k y_k(x) n! t^{k-n} \Big|_{t=0} = c_n n! y_n(x) \quad (9.48)$$

- **Formule intégrale de Cauchy** : (2.14)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-x} dz \quad (9.49)$$

- **Dérivée de la formule de Cauchy** : dérivée par rapport à  $x$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz \quad (9.50)$$

- **Dérivée de la fonction génératrice** :  $g(x, t)$  par rapport à  $t$

$$\frac{\partial^n g(x, t)}{\partial t^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{g(x, z)}{(z-t)^{n+1}} dz \quad (9.51)$$

- **Intégrale de contour** : (9.51) dans (9.50)

$$y_n(x) = \frac{1}{c_n n!} \left. \frac{\partial^n g(x, t)}{\partial t^n} \right|_{t=0} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{c_n} \oint_{\mathcal{C}} \frac{g(x, z)}{z^{n+1}} dz \quad (9.52)$$

- **Formules de Rodrigues** :

$$y_n(x) = \frac{c_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left( w(x) p_2^n(x) \right) \quad (9.28)$$

- **Intégrale de Schlaefli** : (9.50) où  $f(x) = w(x) p_2^n(x)$  dans (9.28)

$$y_n(x) = \frac{c_n}{w(x)} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{w(z) p_2^n(z)}{(z-x)^{n+1}} dz \quad (9.53)$$

- **Fonctions propres** : espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et son dual  $\mathcal{H}^*$  où  $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^*$

$$y_n(x) = \langle x | y_n \rangle \quad (9.54)$$

$$y_m^*(x) = \langle x | y_m \rangle^* = \langle y_m | x \rangle \quad (9.55)$$

- **Solution générale** : (9.1) combinaison linéaire de fonctions propres

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \quad (9.56)$$

- **Solution générale** : (9.54) dans (9.56)

$$\langle x | y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle x | y_n \rangle \quad (9.57)$$

- **Base orthonormée** : fonctions propres  $\equiv$  vecteurs ket : base de  $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} |y\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n |y_n\rangle = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_m \delta_{nm} |y_n\rangle = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_m \langle y_n | y_m \rangle |y_n\rangle \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} c_m |y_n\rangle \langle y_n | y_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n\rangle \langle y_n | y \rangle = \hat{1} |y\rangle \end{aligned} \quad (9.58)$$

- **Relation de fermeture** : somme discrète de projecteurs

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n\rangle \langle y_n| = \hat{1} \quad (9.59)$$

- **Orthonormalité** : fonctions propres

$$\begin{aligned} \langle y_m | y_n \rangle &= \int_a^b y_m^*(x) y_n(x) w(x) dx = \int_a^b \langle y_m | x \rangle \langle x | y_n \rangle w(x) dx \\ &= \langle y_m | \left( \int_a^b |x\rangle \langle x| w(x) dx \right) | y_n \rangle = \delta_{mn} \end{aligned} \quad (9.60)$$

- **Relation de fermeture** : somme continue pondérée de projecteurs

$$\int_a^b |x\rangle \langle x| w(x) dx = \hat{1} \quad (9.61)$$

- **Relations de fermeture** : sommes de projecteurs (9.59) et (9.61)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n\rangle \langle y_n| = \hat{1} \quad \text{et} \quad \int_a^b |x\rangle \langle x| w(x) dx = \hat{1}$$

- **Propagation** : fonction propre : relation de fermeture (9.61)

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \langle x | y_n \rangle = \langle x | \hat{1} | y_n \rangle = \int_a^b \langle x | x' \rangle \langle x' | y_n \rangle w(x') dx' \\ &= \int_a^b y_n(x') \langle x | x' \rangle w(x') dx' = \int_a^b y_n(x') \delta(x - x') dx' \quad (9.62) \end{aligned}$$

- **Distribution de Dirac** : (9.62)

$$\delta(x - x') = \langle x | x' \rangle w(x') = \langle x | \hat{1} | x' \rangle w(x') \quad (9.63)$$

- **Distribution de Dirac** : (9.59) dans (9.63)

$$\delta(x - x') = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x | y_n \rangle \langle y_n | x' \rangle w(x') = w(x') \sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(x') y_n(x)$$

- **Equation aux valeurs propres** : (9.3) : fonctions propres  $y_n(x)$

$$\mathcal{L} y_n(x) = \langle x | \mathcal{L} y_n \rangle = \lambda_n \langle x | y_n \rangle = \lambda_n y_n(x) \quad (9.64)$$

- **Equation aux valeurs propres** : (9.64) et relation de fermeture (9.5s9)

$$\mathcal{L} |y_m\rangle = \lambda_m |y_m\rangle = \lambda_m \hat{1} |y_m\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |y_n\rangle \langle y_n | y_m \rangle \quad (9.66)$$

- **Décomposition spectrale** : opérateur linéaire  $\mathcal{L}$  et inverse  $\mathcal{L}^{-1}$

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |y_n\rangle \langle y_n| \quad (9.67)$$

$$\mathcal{L}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} |y_n\rangle \langle y_n| \quad (9.68)$$

Mêmes sous-espaces et mêmes projecteurs :  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}^{-1}$  commutent

- **Démonstration :**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L} &= \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} |y_m\rangle \langle y_m| \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |y_n\rangle \langle y_n| \right) \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_m} |y_m\rangle \langle y_m| y_n\rangle \langle y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n\rangle \langle y_n| = \hat{1} \quad \square \end{aligned} \quad (9.69)$$

- **Equation différentielle ordinaire inhomogène 2<sup>e</sup> ordre :**

$$p_2(x) y''(x) + p_1(x) y'(x) + p_0(x) y(x) + k^2 = f(x) \quad (9.70)$$

- **Equation différentielle :** (9.70) : opérateur différentiel (9.2)

$$(\mathcal{L} + k^2 \hat{1}) y(x) = f(x) \quad (9.71)$$

- **Opérateur différentiel linéaire :**

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} + k^2 \hat{1} \quad (9.72)$$

- **Equation différentielle :** (9.72) dans (9.71)

$$\mathcal{D} y(x) = f(x) \quad (9.73)$$

- **Solution générale :**

$$y(x) = \mathcal{D}^{-1} f(x) \quad (9.74)$$

- **Décomposition spectrale :** opérateur linéaire  $\mathcal{D}$  et inverse  $\mathcal{D}^{-1}$

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} + k^2 \hat{1} = \sum_{n=1}^{\infty} (k^2 + \lambda_n) |y_n\rangle \langle y_n| \quad (9.75)$$

$$\mathcal{D}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} |y_n\rangle \langle y_n| \quad (9.76)$$

Mêmes sous-espaces et mêmes projecteurs :  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}^{-1}$  commutent (9.77)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-1} \circ \mathcal{D} &= \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_m} |y_m\rangle \langle y_m| \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} (k^2 + \lambda_n) |y_n\rangle \langle y_n| \right) \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{k^2 + \lambda_n}{k^2 + \lambda_m} |y_m\rangle \langle y_m| y_n\rangle \langle y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n\rangle \langle y_n| = \hat{1} \end{aligned}$$

- **Solution générale** : (9.74)

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \mathcal{D}^{-1} f(x) = \langle x | \mathcal{D}^{-1} f \rangle \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} \langle x | y_n \rangle \langle y_n | f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} y_n(x) \langle y_n | \hat{1} | f \rangle \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} y_n(x) \int_a^b \langle y_n | x' \rangle \langle x' | f \rangle w(x') dx' \quad (9.78) \\
 &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} y_n(x) y_n^*(x') f(x') w(x') dx'
 \end{aligned}$$

- **Solution** : produit de convolution pondéré (1.12)

$$y(x) = (G * f)(x) = \int_a^b G(x - x') f(x') w(x') dx' \quad (9.79)$$

- **Fonction de Green** : fonctions propres où  $\lambda_n = \lambda_n^*$

$$G(x - x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} y_n(x) y_n^*(x') = G^*(x' - x) \quad (9.80)$$

- **Fonction de Green** : produit de fonctions propres pondérées (9.81)

$$G(x - x') = \langle x | \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} |y_n\rangle \langle y_n| \right) |x'\rangle = \langle x | \mathcal{D}^{-1} |x'\rangle$$

- **Equation de Green** : (9.63) et (9.81)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}G(x - x') &= \mathcal{D} \langle x | \mathcal{D}^{-1} |x'\rangle = \langle x | \mathcal{D} \circ \mathcal{D}^{-1} |x'\rangle = \\ &= \langle x | \hat{1} |x'\rangle = \langle x |x'\rangle = \frac{\delta(x - x')}{w(x')} \end{aligned} \quad (9.82)$$

- **Equation de Green** : pondérée

$$\mathcal{D}G(x - x') w(x') = \delta(x - x') \quad (9.83)$$

- **Fonctions propres normées** : où  $w(x) \in \mathbb{R}_+$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{w(x)} y_n(x) \quad \text{et} \quad \varphi_n^*(x) = \sqrt{w(x)} y_n^*(x) \quad (9.84)$$

- **Orthonormalité** : vecteurs propres normés (9.84) dans (9.5)

$$\langle \varphi_m | \varphi_n \rangle = \int_a^b \varphi_m^*(x) \varphi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (9.85)$$

- **Ondes stationnaires** : fonctions propres sur une corde vibrante

$$y_n''(x) + k_n^2 y_n(x) = 0 \quad (9.105)$$

- **Opérateur différentiel linéaire** :

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} \quad (9.106)$$

- **Equation aux valeurs propres** : fonctions propres

$$y_n''(x) = \mathcal{L} y_n(x) = \lambda_n y_n(x) \quad (9.107)$$

- **Valeurs propres** :

$$\lambda_n = -k_n^2 \quad (9.108)$$

- **Coefficients** :

$$p_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad p_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad p_2(x) = 1 \quad (9.109)$$

- **Fonction poids** :

$$w(x) = \frac{1}{p_2(x)} \exp\left(\int^x \frac{p_1(x')}{p_2(x')} dx'\right) = 1 \quad (9.110)$$

- **Orthonormalité** : fonctions propres normées (9.5) avec  $w(x) = 1$

$$\langle y_m | y_n \rangle = \int_0^L y_m^*(x) y_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (9.111)$$

- **Conditions aux bords** : corde fixée en  $x = 0$  et  $x = L$

$$y_n(0) = y_n(L) = 0 \quad (9.112)$$

- **Fonctions propres normées** : (9.107) et (9.112) série de Fourier impaire

$$y_n(x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (9.113)$$

- **Equation aux valeurs propres** : (9.113) dans (9.107)

$$y_n''(x) = -\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^2 b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \lambda_n b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (9.114)$$

- **Valeurs propres :** (9.114)

$$\lambda_n = -k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (9.115)$$

- **Orthonormalité :** fonctions propres normées (9.113) dans (9.111)

$$\langle y_m | y_n \rangle = b_m^* b_n \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn} \quad (9.116)$$

- **Relation d'orthonormalité :**

$$\frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn} \quad (9.117)$$

- **Coefficient :** (9.116) et (9.117)

$$|b_n|^2 = b_n^* b_n = \frac{2}{L} \quad \text{ainsi} \quad b_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad (9.118)$$

- **Fonctions propres normées :** (9.118) dans (9.113)

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (9.119)$$

- **Ondes stationnaires entretenues** : sur une corde vibrante

$$y''(x) + k^2 y(x) = f(x) \quad (9.103)$$

La fonction  $f(x)$  rend compte de la force d'entraînement périodique en régime stationnaire.

- **Equation aux valeurs propres** : opérateur différentiel linéaire  $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} y(x) = (\mathcal{L} + k^2 \hat{1}) y(x) = f(x) \quad (9.104)$$

- **Fonction de Green** :

$$\begin{aligned} G(x - x') &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} y_n(x) y_n^*(x') \\ &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) \end{aligned} \quad (9.120)$$

- **Mouvement vertical** : produit de convolution  $(G * f)(x)$

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^L G(x - x') f(x') dx' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) f(x') dx' \end{aligned} \quad (9.121)$$

- **Terme d'entraînement** : condition aux bords

$$f(0) = f(L) = 0 \quad (9.122)$$

- **Terme d'entraînement** : série de Fourier impaire

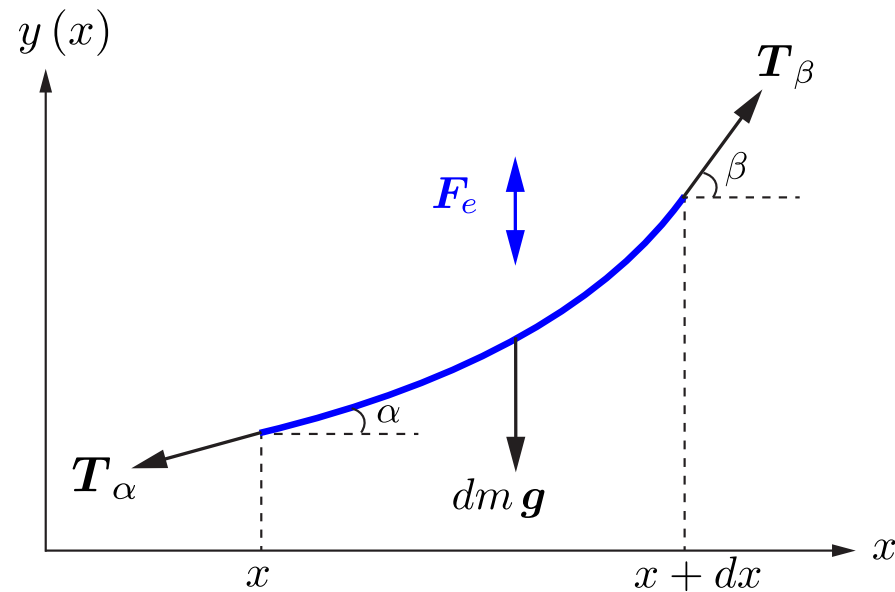
$$f(x') = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \quad (9.123)$$

- **Mouvement vertical** : (9.123) dans (9.121) et (6.40) orthonormalité

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_m}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) dx' \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_m}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \delta_{mn} \end{aligned} \quad (9.124)$$

- **Mouvement vertical** :

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (9.125)$$



- **Force d'entraînement périodique verticale** : élément infinitésimal

$$F_e = dm a_0(x) \cos(\omega_0 t) \hat{y} \quad (9.86)$$

- **Equation du mouvement** : élément infinitésimal de corde homogène

$$\sum F^{\text{ext}} = T_\alpha + T_\beta + F_e + dm g = dm a \quad (9.87)$$

- **Projections** : petits angles :  $\alpha \ll 1$  et  $\beta \ll 1$

$$\text{selon } \hat{x} : -T_\alpha + T_\beta = 0 \quad (9.88)$$

$$\text{selon } \hat{y} : -T_\alpha \alpha + T_\beta \beta + dm \left( a_0(x) \cos(\omega_0 t) - g \right) = dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

- **Petits angles** :  $\alpha \ll 1$  et  $\beta \ll 1$  avec  $T = T_\alpha = T_\beta$

$$\alpha \simeq \tan \alpha = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$

$$\beta \simeq \tan \beta = \frac{\partial y(x + dx, t)}{\partial x} \quad (9.90)$$

- **Mouvement vertical** : (9.91)

$$\frac{\partial y(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} - \frac{dm}{T} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{dm}{T} \left( g - a_0(x) \cos(\omega_0 t) \right)$$

- **Identité infinitésimale** :

$$\frac{\partial y(x + dx, t)}{\partial x} = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (9.92)$$

- **Densité linéique constante** : corde homogène

$$\mu = \frac{dm}{dx} \quad (9.93)$$

- **Corde tendue** :

$$dm g \ll T \quad (9.94)$$

- **Mouvement vertical** : onde transversale (9.91) - (9.94)

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\mu}{T} a_0(x) \cos(\omega_0 t) \quad (9.95)$$

- **Vitesse du son** : le long de la corde

$$c_s = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (9.96)$$

- **Ondes transversales** : corde de longueur  $L$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{a_0(x)}{c_s^2} \cos(\omega_0 t) \quad (9.97)$$

- **Transformée de Fourier inverse** : temporelle (7.17)

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}''(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \tilde{y}(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (9.98)$$

- **Transformée de Fourier inverse** : temporelle (7.17) où  $\omega_0 > 0$

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) &= \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} & (9.98) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)}{2} e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(\omega - \omega_0) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

- **Onde stationnaire** :  $\omega$  fixé (9.98) dans (9.97) : intégrant

$$\tilde{y}''(x, \omega) + \frac{\omega^2}{c_s^2} \tilde{y}(x, \omega) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a_0(x)}{c_s^2} \delta(\omega - \omega_0) \equiv \tilde{f}(x, \omega) \quad (9.99)$$

- **Relation de dispersion** :  $y(x) = \tilde{y}(x, \omega)$  et  $f(x) = \tilde{f}(x, \omega)$

$$k = \frac{\omega}{c_s} \quad (9.100)$$

- **Ondes stationnaires entretenues** : corde vibrante (9.100) dans (9.99)

$$y''(x) + k^2 y(x) = f(x) \quad (9.101)$$